数理解析研究所講究録
582巻 1986年 100-111

作用素単調関数と Donoghue の定理

大阪教育大 藤井 淳一 (Jun Ichi Fujii)

Donoghueによって扱われたヒルベルト空間のノルムの補間と，その積分表示定理[3]を，作用素関数の立場，さらには作用素平均の立場から見ると，作用素凹関数の議論になり，自然に対応する作用素単調関数の議論が展開できる。

したがって，まずヒルベルト空間上の正作用素の平均と，作用素関数の対応の話から始めよう。

1．作用素関数と作用素平均

ここで扱う作用素関数のクラスは，次の2種類である。

OM：$[0,\infty)$ 上の非負作用素単調関数全体

即ち，$f\in OM \rightleftharpoons 0\leq A\leq B \Rightarrow 0\leq f(A)\leq f(B)$.

OC：$[0,1]$ 上の非負作用素凹関数全体

即ち，$k\in OC \rightleftharpoons 0\leq A, B\leq 1$

$$\Rightarrow 0\leq \frac{k(A)+k(B)}{2}\leq k\left(\frac{A+B}{2}\right).$$

特に，連続性を仮定したsub-classを，それぞれ，COM，COCと書くことにする。

作用素平均の話は，Ando [1] に始まり，

$$\text{幾何平均} \quad A\,g\,B = \max\left\{ X \geq 0 \;\middle|\; \begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$$

$$\text{調和平均} \quad A\,h\,B = \max\left\{ X \geq 0 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} X & X \\ X & X \end{pmatrix} \right\}$$

が導入された。A，Bが可換ならば，通常の数の平均にもちろん対応している。また，調和平均は，回路網理論で重要な概念である「平行和（parallel sum）」の2倍にあたるものである。さらに，[4],[5],[6]にあるように，算術平均（$A\,a\,B = \frac{A+B}{2}$）とあわせてみれば，算術幾何平均，算術調和平均（実は幾何平均）が定義でき，前述の平均と同様の性質をもつことがわかった。その中で特に重要な性質であり，後に Kubo-Ando [11]によって公理化される3つの性質をあげると，作用素平均 m に対し

(M1) $A \leq C,\ B \leq D \Rightarrow A\,m\,B \leq C\,m\,D$ （単調性）

(M2) $A_n \downarrow A,\ B_n \downarrow B \Rightarrow A_n\,m\,B_n \downarrow A\,m\,B$ （半連続性）

(M3) $C^*(A\,m\,B)C \leq C^*AC\,m\,C^*BC$ （transformer inequality）

が満たされる。ここでは，(M1)-(M3) を満たす正作用素上の二項演算 m を「平均」と呼ぶことにする。

これらの性質から得られる平均の性質をみてみよう。(M2)の条件から，作用素平均は，可逆な作用素の平均に帰着され

ることがわかる： $A\,m\,B = s\text{-}\lim_{n\to\infty}(A+\frac{1}{n})\,m\,(B+\frac{1}{n})$

また、可逆な作用素 C に対し、(M3)を使って

$$C^*AC\,m\,C^*BC = C^*C^{*-1}(C^*AC\,m\,C^*BC)C^{-1}C \leqq C^*(A\,m\,B)C \leqq C^*AC\,m\,C^*BC$$

より、$C^*(A\,m\,B)C = C^*AC\,m\,C^*BC$ が得られるので、A が可逆な正作用素ならば

$$A\,m\,B = A^{\frac{1}{2}}(1\,m\,A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}$$

と変形できるので、本質的には $f(x) = 1\,m\,x$ という非負実数値関数の話になる。さらに、$0 \leqq A \leqq B$ ならば

$$0 \leqq f(A) = 1\,m\,A \leqq 1\,m\,B = f(B)$$

から、$f \in OM$、(M2) より $f \in COM$ となる。

実際、Kubo-Ando [11] によって、平均全体、COM、$\mathbb{R}^+$ 上の正値ラドン測度の3者の間に、次の関係式で順序同型が存在する事が示された：

$$1\,m\,x = f(x) = \int_0^\infty \frac{x(1+t)}{x+t}\,d\mu(t)$$

一方、Pusz-Woronowicz [12] によって、半双線型形式の平均が論じられていたが、そのアナロジーを辿って、作用素平均からながめると、単位的 C^*-環上の正値線型形式の平均が導入できる。[7]：

φ, ψ を C^*-環 $\mathcal{A}$ 上の正値線型形式とするとき、

$$\mathcal{N} = \{ A \in \mathcal{A} \mid \varphi(A^*A) + \psi(A^*A) = 0 \}$$

は、閉左イデアルになり、$\mathcal{A}/\mathcal{N}$ に内積

$$\langle A^\circ, B^\circ \rangle = \varphi(B^*A) + \psi(B^*A) \quad (^\circ \text{は} \mathcal{A} \to \mathcal{A}/N \text{の q.map})$$

が定義でき、この内積による$\mathcal{A}/N$の完備化を$\mathcal{H}$とする。

絶対連続性から，$\mathcal{H}$上の正作用素H，Kで

$$\varphi(B^*A) = \langle HA^\circ, B^\circ \rangle \ , \ \psi(B^*A) = \langle KA^\circ, B^\circ \rangle$$

となるもの（ラドン・ニコディムの微係数）が存在する。

すると，

$$\begin{aligned} \langle A^\circ, B^\circ \rangle &= \langle HA^\circ, B^\circ \rangle + \langle KA^\circ, B^\circ \rangle \\ &= \langle HA^\circ, B^\circ \rangle + \langle (1-H)A^\circ, B^\circ \rangle \end{aligned}$$

と変形できるので，正値線型形式の平均として

$$(\varphi \, m \, \psi)(A) = \langle H m (1-H) A^\circ, 1^\circ \rangle$$

という定義ができる。ここでの平均は，正縮小作用素Hと，

$[0,1]$ 上の実数値関数 $k(x) = x \, m \, (1-x)$ の話である。

この関数kの性質を調べると，$k \in$ COCであることがわかり，平均mを介して

$$f(x) = 1 \, m \, x = (1+x)\left(\frac{1}{1+x} \, m \, \frac{x}{1+x}\right) = (1+x) \, k\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

の関係式で，COMと1 to 1に対応する。

以上のように，作用素の平均，COM，COC，Radon測度の4者は同等の概念であることがわかった。この視点に立って，これから述べるDonoghueの定理を見れば，自然に作用素単調関数版の定理が得られるし，もう一つの作用素平均の側面が見られるだろう。

2. Donoghue型の定理

Donoghueは1967年の論文[3]で，ヒルベルト空間のノルムの補間を作用素にやき直して論じている。2つのノルムを$\| \ \|_a$, $\| \ \|_b$としたとき，標準のノルムとして

$$\|x\|^2 = \|x\|_a^2 + \|x\|_b^2$$

を考えると，前章の議論と同様に，ラドン・ニコディムの微係数として，次のような正縮小作用素Hが存在する：

$$\|x\|^2 = (x, x) = (Hx, x) + ((1-H)x, x)$$

補間はこのように，Hと1−Hの補間の話になる。作用素の話に定義を書き直せば，$0 \leqq H \leqq 1$に対し，

定義. K : exact interpolation of H （$K \in EI(H)$と書く）

$$\Longleftrightarrow \quad T^*HT \leqq H,\ T^*(1-H)T \leqq 1-H \Rightarrow T^*KT \leqq K.$$

（ここでexactの意味は$T^*KT \leqq aK$の$a=1$のこと）

このとき，Donoghueの定理を，作用素関数で書き直すと，

Donoghueの定理　$K \in EI(H) \Longleftrightarrow {}^{\exists}k \in OC\ ; k(H) = K.$

自然な対応として，$H \geqq 0$に対し

定義. K : exact subinterpolation of H （$K \in ES(H)$と書く）

$$\Longleftrightarrow \quad T^*HT \leqq H,\ T^*T \leqq 1 \Longrightarrow T^*KT \leqq K$$

と定めれば，アナロジーを辿って

定理. $K \in ES(H) \Longleftrightarrow {}^{\exists}f \in OM\ ; f(H) = K$　[8]

が得られる。証明をすべて述べることはできないが，Donoghue

の証明の改良と紹介を兼ねて，アウトラインを述べよう。

根底には次の平均の不等式がある。たとえば定理の方なら

$T^*HT \leqq H,\ T^*T \leqq 1$ なる T に対し，

$$T^*KT = T^*(1mH)T \leqq T^*T\ m\ T^*HT \leqq 1mH = K,$$

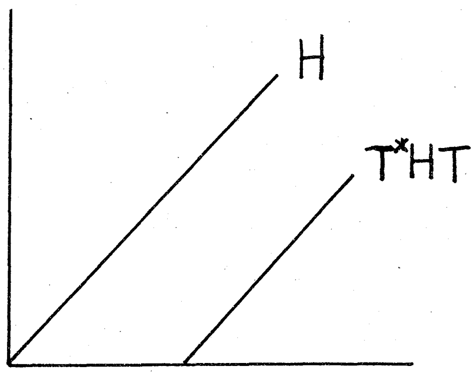
ただし，H は可逆とする。けれども，H は可逆としてもよいことがわかるので，$\Longleftarrow$ の証明はこれでよい。

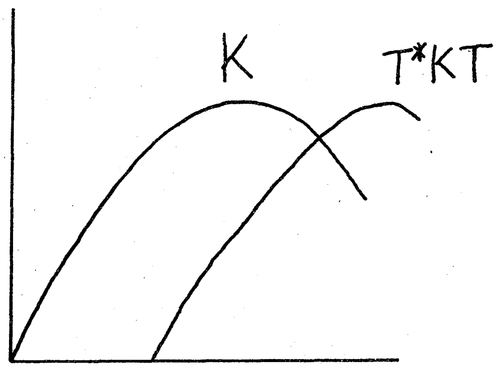
逆に，$K \in ES(H)$ をとれば $H \smile U$：ユニタリに対し，

$U^*HU = H,\ U^*U = 1$ より，$U^*KU \leqq K$，

同様に $H \smile U^*$ だから $UKU^* \leqq K$ が得られ，$K \leqq U^*KU$ から $K = U^*KU$，即ち $K \smile U$ がわかる。したがって，K は，H の bi-commutant H'' に入るので $f(H) = K$ となる，$\sigma(H)$ 上の有界可測関数 f が存在する。当然証明は f が $\sigma(H)$ の上で作用素単調であることを示し，さらに $[0, \infty)$ に拡張可能であることを示すという二段階になる。

まず f の初等的な性質を見ていこう。f は，非負で連続で単調非減少となることがわかるが，たとえば，単調非減少を示す場合，イメージ的には次ページの左図のように，T^* と T ではさむと，H を右側へずらすような T を考えておく。すると，もし K が右図のように減少する部分をもてば，T^*KT を K がおさえられないようになってしまう。連続性も同じようなテクニックで示すことができる。





さらに、Hが可逆のときは明らかに、fはリプシッツ関数となる。このことを利用し、ユニタリ同値な作用素で近似していくことによって、次の補題を得る。

<u>補題1</u>. $f(H)\in ES(H),\ \sigma(H')=\sigma(H) \Longrightarrow f(H')\in ES(H')$

スペクトルが等しいという条件は、容易に $\sigma(H')\subset\sigma(H)$ に変えられる。この形の補題がDonoghue [3]では重要なのだが、それはimplicitに次のような事実を示すからである。

<u>補題2</u>. fは $\sigma(H)$ 上で作用素単調である.

(証明) $0\leqq A\leqq B,\ \sigma(A),\sigma(B)\subset\sigma(H)$ に対し、

$L=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ を考えると、$\sigma(L)\subset\sigma(H)$ だから補題1より

$f(L)\in ES(L)$ となる。特に、$T=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対し、

$T^*T\leqq 1,\ T^*LT=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\leqq\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=L$ を満たすから

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(A) \end{pmatrix}=T^*f(L)T\leqq f(L)=\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & f(B) \end{pmatrix}$$

となり、(2,2)成分を比較すれば $f(A)\leqq f(B)$ を得る。

//

さて．次は作用素単調関数を $[0,\infty)$ に拡張するわけだが、都合よくも，Donoghueは 1966年の論文 [2] で拡張するための同値条件を求めていた。特に有限の $\sigma(H)=\sigma$ に対し，Hは可逆だから．$\sigma^*=\{\frac{1}{\lambda}\mid \lambda\in\sigma\}$ が定められる。このとき．

<u>Donoghueの拡張定理</u>　$f\in OM$ の必要十分条件は．次の3つの関数が、同時に3つの条件を満たすことである：

(i) $\tilde{f}$：作用素単調 on $\sigma\cup\{0\}$ $(\tilde{f}(0)=0,\ \tilde{f}(x)=f(x)\ \ (x\neq0))$

(ii) f^*：作用素単調 on $\sigma^*\cup\{0\}$ $\left(f^*(0)=0,\ f^*(x)=\dfrac{1}{f(1/x)}\ \ (x\neq0)\right)$

(iii) f°：作用素単調 on $\sigma^*\cup\{0\}$ $\left(f^\circ(0)=0,\ f^\circ(x)=\dfrac{x}{f(1/x)}\ \ (x\neq0)\right)$

この f^* と f° は，もし作用素平均を知らなければ．非常にわかりにくく，この定理のフォーミュレーションが理解しにくい。ところが．$f(x)=1\,m\,x$ という平均を経由すると，

$$f^*(x)=\frac{1}{f(1/x)}=(1\,m\,x^{-1})^{-1}$$ となり，

実は．平均 m の <u>adjoint</u>　$A\,m^*\,B=(A^{-1}\,m\,B^{-1})^{-1}$ に対応する。(たとえば．算術平均と調和平均は互いに他のadjointで．幾何平均は，adjoint不変である。)　また，

$$f^\circ(x)=\frac{x}{f(1/x)}=x(1\,m\,x^{-1})^{-1}=(x\,m\,1)^{-1}$$ より

実は．平均 m の <u>transpose</u>　$A\,m^\circ\,B=B\,m\,A$　に対応している。

したがって，拡張定理の(i)は，小さい方への拡張，(ii)は大きい方への拡張，(iii)は．平均になるための左側の項の単調性という見方ができるだろう。この条件を逐一チェックする

ことによって，5ページの定理は証明されたことになる。

3. 作用素平均と補間（cf.[9]）

ここで，さらにDonoghue型の補間の定義を形式的に拡張し，平均と補間との差を明らかにしよう。自然な拡張としてあらためて，正作用素A，Bに対し，

定義．C：exact interpolation for A, B　$(C \in EI(A,B))$

$$\Longleftrightarrow \quad T^*AT \leqq A,\ T^*BT \leqq B \Longrightarrow T^*CT \leqq C$$

と定める。作用素の「補間」としては，こちらの方がより補間らしいが，前述の補間との関連は次のようになる：

$$K \in EI(H) \Longleftrightarrow K \in EI(H, 1-H)$$

$$K \in ES(H) \Longleftrightarrow K \in EI(1, H)$$

命題．A，Bは可逆な正作用素とする。そのとき，

$$C \in EI(A,B) \Longleftrightarrow {}^{\exists}\text{平均 } m\,;\ C = A\,m\,B$$

（証明）　$\Leftarrow$は，次の不等式でわかる。

$$T^*(A\,m\,B)T \leqq T^*AT\,m\,T^*BT \leqq A\,m\,B \quad (T^*AT \leqq A,\ T^*BT \leqq B)$$

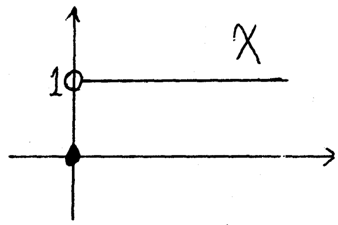
逆に$C \in EI(A,B)$とすると，$A^{-\frac{1}{2}}CA^{-\frac{1}{2}} \in ES(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})$となるから，定理より ${}^{\exists}f \in OM\,;\ f(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}) = A^{-\frac{1}{2}}CA^{-\frac{1}{2}}$

ここでA，Bの可逆性より，$f(x) = 1\,m\,x$ という平均を考えてよいから，

$$C = A^{\frac{1}{2}}f(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}(1\,m\,A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} = A\,m\,B \qquad //$$

この命題の可逆性条件ははずせない。$OM \supsetneq COM$ となるからである。これがそのまま補間と平均の差になっている。通常，作用素関数は，開区間上の解析関数として扱われているので，$(0,\infty)$ 上では両者の概念は同じである。しかし，たとえば，次のような関数 χ

$$\begin{cases} \chi(x) = 1 & (x \neq 0) \\ \chi(0) = 0 & \end{cases}$$



は，$\chi \in OM$ で $\chi \notin COM$ である。ところで，有界な範囲では，$\chi(x) = \lim_{\alpha \to 0} x^{\alpha}$ で χ は得られ，実はこの関数が本質的である。なぜなら $\forall f \in OM$ は，$\hat{f} \in COM$ ($\hat{f}(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon)$, $\hat{f}(x) = f(x)$ $(x \neq 0)$) によって，

$$f = (\hat{f} - a)(x) + a\chi \qquad (a = \hat{f}(0) - f(0))$$

とかけ，次の補題を得られるからである。

<u>補題3</u>． $f \in OM \iff {}^{\exists} f_{\alpha} \in COM \,;\, f = \lim f_{\alpha}$

$k \in OC \iff {}^{\exists} k_{\alpha} \in COC \,;\, k = \lim k_{\alpha}$

実はこの補題があるからこそ，可逆作用素にすべては帰着されたのである。また，この補題により，COMの定理はたいていOMまで拡張できる。たとえば

<u>Hansen の定理</u>[10]　$f \in OM$，$\|T\| \leqq 1$ ならば

$$T^{*}f(A)\,T \leqq f(T^{*}AT) \qquad ({}^{\forall}A \geqq 0)$$

などである。

またHansenの定理と，Donoghueの定理があれば，1章で述べたような作用素単調関数と作用素凹関数の対応から，主定理はより自然に得られる。つまり，$T^*HT \leqq H$，$T^*T \leqq 1$ なら $K = f(H)$ に対し，$T^*KT = T^*f(H)T \leqq f(T^*HT) \leqq f(H) = K$ が得られ，逆に

$$k \in OC \Longrightarrow f_k(x) = (1+x)k\left(\frac{1}{1+x}\right) \in OM$$

の変換を利用すれば，Donoghueの定理で得られる作用素凹関数から，定理での作用素単調関数が得られることになる。

参考文献

[1] T. Ando : Topics on operator inequalities, Hokkaido Univ. Lecture Note, 1978

[2] W.F.Donoghue, Jr. : The theorems of Loewner and Pick, Israel J. Math., 4 (1966), 153-170.

[3] W.F.Donoghue, Jr. : The interpolation of quadratic norms, Acta Math., 118 (1967), 251-270.

[4] J.I.Fujii : Arithmetico-geometric mean of operators, Math. Japon. 23 (1978), 667-669.

[5] J.I.Fujii : On geometric and harmonic mean of

operators, Math. Japon., 24 (1979), 203-207.

[6] J. I. Fujii and M. Fujii : Some remarks on operator means, Math. Japon., 24 (1979), 335-339.

[7] J. I. Fujii : Operator concave functions and means of positive linear functionals, Math. Japon., 25 (1980), 453-461.

[8] J. I. Fujii : Operator monotone functions and Donoghue's theorem, to appear in Math. Japon.

[9] J. I. Fujii and M. Fujii and H. Takehana : Interpolation theorems of Donoghue's type on positive operators, to appear in Math. Japon.

[10] F. Hansen : An operator inequality, Math. Ann., 246 (1980), 249-250.

[11] F. Kubo and T. Ando : Means of positive linear operators, Math. Ann., 246 (1980), 205-224.

[12] W. Pusz and S. L. Woronowicz : Functional calculus for sesquilinear forms and purification map, Rep. Math. Phys., 8 (1975), 159-170.